

Probability and Random Processes

ECS 315

Dr. Prapun Suksompong

prapun@siit.tu.ac.th

Expectation and Variance



Office Hours:

BKD 3601-7

Monday 14:40-16:00

Friday 14:00-16:00

Calculations of Expected Values



sum exp(-alpha) k * alpha^k / k! from k =0 to infinity



Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \exp(-\alpha) \alpha^k}{k!} = \alpha \quad \mathbb{E}X = \alpha$$

n! is the factorial function »

Poisson(α)

sum k * n!/(k!(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n



Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = n p \quad \mathbb{E}X = n p$$

n! is the factorial function »

Binomial(n,p)

Analyze the following games (1)

Game #1

Flip a fair coin.

H: You get ₦100

T: You lose ₦100

r	$P_R(r)$
+100	$1/2$
-100	$1/2$

$$\begin{aligned} \text{IER} &= \sum_r r P_R(r) \\ &= 100 \times \frac{1}{2} - 100 \times \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Game #2

Flip a fair coin.

H: You get ₦200

T: You lose ₦100

r	$P_R(r)$
+200	$1/2$
-100	$1/2$

$$\begin{aligned} \text{IER} &= 200 \times \frac{1}{2} + (-100) \times \frac{1}{2} \\ &= 50 \end{aligned}$$

Analyze the following games (2)

Game #3

Flip an *unfair* coin with $P(\{H\}) = 10^{-6}$

H: You get ₦2,000,000

T: You lose ₦0

v	$P_R(v)$
2×10^6	10^{-6}
0	$1 - 10^{-6}$

$IE_R = 2$

Game #4

Pay ₦50 to play the game.

Flip an *unfair* coin with $P(\{H\}) = 10^{-6}$

H: You get ₦2,000,000

T: You lose ₦0

Intuitively,

same as game #3 but you always have to pay extra 50.

v	$P_R(v)$
$2 \times 10^6 - 50$	10^{-6}
-50	$1 - 10^{-6}$

$IE_R = (2 \times 10^6 - 50) 10^{-6} - 50 \times (1 - 10^{-6})$
 $= 2 - 50 \times 10^{-6} - 50 + 50 \times 10^{-6}$
 $= -48$

Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

เงื่อนไขเงินรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล
(ใช้ตั้งแต่งวดวันที่ 1 พฤศจิกายน 2552 เป็นต้นไป)

สลาก 1 ชุด มี 1 ล้านฉบับๆ ละ 40 บาท

ถ้าจำหน่ายหมด กำหนดเงินรางวัลต่อชุด ดังนี้

รางวัลที่ หนึ่ง	มี	1 รางวัล	ๆ ละ	2,000,000 บาท
รางวัลที่ สอง	มี	5 รางวัล	ๆ ละ	100,000 บาท
รางวัลที่ สาม	มี	10 รางวัล	ๆ ละ	40,000 บาท
รางวัลที่ สี่	มี	50 รางวัล	ๆ ละ	20,000 บาท
รางวัลที่ ห้า	มี	100 รางวัล	ๆ ละ	10,000 บาท
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่หนึ่ง	มี	2 รางวัล	ๆ ละ	50,000 บาท
รางวัลเลขท้าย 3 ตัว เสีย 4 ครั้ง	มี	4,000 รางวัล	ๆ ละ	2,000 บาท
รางวัลเลขท้าย 2 ตัว เสีย 1 ครั้ง	มี	10,000 รางวัล	ๆ ละ	1,000 บาท

สลาก 1 ชุด มี 14,168 รางวัล เป็นเงิน 23,000,000 บาท

รางวัลที่ 1 พิเศษ มี 2 รางวัล แบ่งเป็น 2 กลุ่ม

กลุ่มที่ 1 เท่ากับ จำนวนชุดที่ 01 ถึงชุดที่ 30 ที่จำหน่ายในแต่ละงวด x 1,000,000 บาท และยังมีสิทธิได้รับเงินรางวัลอื่นอีก ตามเงื่อนไขเงินรางวัล

กลุ่มที่ 2 เท่ากับ จำนวนชุดที่ 51 ถึงชุดที่ 70 ที่จำหน่ายในแต่ละงวด x 1,000,000 บาท และยังมีสิทธิได้รับเงินรางวัลอื่นอีก ตามเงื่อนไขเงินรางวัล



สำนักงานสลากกินแบ่งรัฐบาล ช่วยราษฎร์ เสริมรัฐ ยืนหยัดคู่ศิริม									
ผลการออกรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล งวดที่ 16 ประจำวันที่ 16 สิงหาคม พ.ศ. 2555 เป็นงวดที่ 63 สลากกาชาดพิเศษสลากกาชาดไทย เป็นงวดที่ 48 สลากบำรุงการกุศลงวดพิเศษ ศิริราช เป็นงวดที่ 38 สลากบำรุงการกุศลงวดพิเศษ รามาธิบดี									
พิมพ์แจก					ตรวจรางวัลใน เว็บไซต์ได้ที่ โทร. 1900-1900-10 . 0-2629 - 1000			ตรวจรางวัล Internet www.glo.or.th	
รางวัลที่ 1			เลขท้าย 3 ตัว			เลขท้าย 2 ตัว			
สลากกินแบ่งรัฐบาล รางวัลละ 2,000,000 บาท					รางวัลละ 2,000 บาท			รางวัลละ 1,000 บาท	
สลากกาชาดพิเศษและสลากการกุศล รางวัลละ 3,000,000 บาท									
683877					032	612	730	775	2 8
รางวัลที่ 1 พิเศษ	สลากกินแบ่งรัฐบาล กลุ่มที่ 1 รางวัลละ 30 ล้านบาท ชุดที่	20			หมายเลข	683877			
	สลากกินแบ่งรัฐบาล กลุ่มที่ 2 รางวัลละ 20 ล้านบาท ชุดที่	62			หมายเลข	683877			
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1		รางวัลละ 50,000 บาท			รางวัลที่ 2		รางวัลละ 100,000 บาท		
6 8 3 8 7 6		6 8 3 8 7 8			193867	221117	604811	884831	980179
รางวัลที่ 3		รางวัลละ 40,000 บาท							
011403	073342	115070	258151	271347	301472	304622	558992	884665	897294
รางวัลที่ 4		รางวัลละ 20,000 บาท							
032967	138576	244415	294466	413340	489333	587378	727764	869215	937745
063102	146256	248433	341630	429131	501047	602455	751560	890107	939311
089080	214670	250238	349327	459303	550308	608005	756100	890543	955614
108256	219309	251583	369753	471331	568930	614980	784592	899953	992948
136658	239439	260506	392185	487692	579567	637739	821743	900384	996269
รางวัลที่ 5		รางวัลละ 10,000 บาท							
020184	106799	169191	281684	404802	536738	627081	713064	807726	913963
026416	118454	219308	320426	410730	537552	637029	723025	808419	953376
038792	119505	221805	333524	413290	549048	638158	731046	820575	965902
045281	129862	223867	337108	460092	555644	657335	736670	826723	974542
046893	130225	236534	340069	460709	558116	659391	737270	827400	975085
056328	138767	247702	343903	480080	571304	659776	773972	845269	980457
074613	141161	264348	363957	487653	575135	662978	782542	855606	980807
096773	154062	267268	371975	490633	601996	672696	783096	866715	985181
097349	160338	267500	393699	495203	611947	678287	803491	867061	990506
102320	166180	271282	404326	523074	617576	708080	804956	901106	990972

Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

ตารางที่ 4 การคำนวณกำไรขาดหวังของสลากกินแบ่งรัฐบาล

ชื่อรางวัล	จำนวนรางวัล	กำไร(1) = เงินรางวัล - ค่าซื้อสลาก ¹	โอกาสที่จะถูกรางวัล (2)
รางวัลที่ 1 ชุดใหญ่ 30 ล้านบาท	1	30 ล้าน - 40 บาท	0.00000333 %
รางวัลที่ 1 ชุดใหญ่ 16 ล้านบาท	1	16 ล้าน - 40 บาท	0.00000625 %
รางวัลที่ 1	46	2 ล้าน - 40 บาท	0.0001%
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1	92	5 หมื่น - 40 บาท	0.0002%
รางวัลที่ 2	230	1 แสน - 40 บาท	0.0005%
รางวัลที่ 3	460	4 หมื่น - 40 บาท	0.001%
รางวัลที่ 4	2,300	2 หมื่น - 40 บาท	0.005%
รางวัลที่ 5	4,600	1 หมื่น - 40 บาท	0.01%
เลขท้าย 3 ตัว	184,000	2 พัน - 40 บาท	0.4%
เลขท้าย 2 ตัว	460,000	1 พัน - 40 บาท	1.0%
สลากที่ไม่ถูกรางวัลใดๆ	-	-40 บาท	98.58%

¹ ไม่ได้รวมภาษีที่ ณ ที่จ่ายไม่เกินร้อยละ 1 ของเงินรางวัล เพื่อจ่ายต่อการคำนวณ

Expected Profit = -16



Can only press once

- Can only press once – Instant \$1 Million or 50% chance for \$100 million

**INSTANT
\$1 MILLION**



**50% CHANCE OF
\$100 MILLION**



Computation of $\mathbb{E}[X^2]$



sum exp(-alpha) k^2 * alpha^k / k! from k =0 to infinity



Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \exp(-\alpha) \alpha^k}{k!} = \alpha (\alpha + 1)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \alpha + \alpha^2$$

n! is the factorial function >

Poisson(α)

sum k^2 * n!/(k!(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n



Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2 n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = p (n^2 p - n p + n)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = np(1-p) + (np)^2$$

n! is the factorial function >

Binomial(n,p)

One number to represent a data set

$$\begin{aligned} \text{data} &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7] \\ &= [-10, -9, 1, 2, 3, 4, 5] \end{aligned}$$

Find one number
(a) to represent
this data set.

